# Лекция 8

Рассмотрим 2-ой случай альтернативы Фредгольма (- характеристическое число).

## Для существования решения неоднородного уравнения

 (1)

необходимо и достаточно, чтобы  была ортогональна любому решению  однородного сопряженного уравнения

,

т.е. .

При выполнении последнего условия уравнении (1) будет иметь бесконечно много решений.

Если  не ортогональна хотя бы одному из , то неоднородное уравнение (1) решений не имеет.

## В случае с вырожденным ядром

 

однородное сопряженное уравнение

 



Отсюда следует, что , .

Отметим, что при использовании альтернативы Фредгольма, вместо того, чтобы доказывать, что данное неоднородное интегральное уравнение имеет единственное решение, часто бывает проще доказать, что соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение.

**Пример 1.** Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра.



Ядро  - вырожденное.

  

  .

Если  - решений нет.

Если  существует единственное решение , .

### Пример 2.

****

 - является вырожденным

, , , .



, 







, , 



, , 

## В результате получаем систему



## Определитель системы



Если  решений нет.

Если  , 



### Пример 3.





, , , 



, 



*.*

*, , .*

*.*

*, , .*

В результате получаем систему

Определитель системы равен

Если , то , .

Если , то система имеет бесконечное множество решений

, то , , .

, то , , .

**Интегральные уравнения Фредгольма с произвольным непрерывным ядром.**

**Теоремы Фредгольма.**

Ранее было установлено, что интегральное уравнение

(1)

с ядром имеет единственное решение , которое определяется формулой

для значений , удовлетворяющих условию , .

Для интегральных уравнений с вырожденным ядром были доказаны теоремы Фредгольма, касающиеся разрешимости таких уравнений. Попытаемся распространить эти теоремы на случай произвольного непрерывного ядра. Решение уравнения Фредгольма в общем случае сводится к решению уравнения с вырожденным ядром, если ядро можно приблизить вырожденным ядром с любой степенью точности. Если , то это можно сделать всегда, причем многими способами.

Например, известна теорема Вейерштрасса о том, что всякую функцию , непрерывную на сегменте , с любой степенью точности можно приблизить многочленом конечной степени , т.е. , где для

*. В случае , где . – вырожденное ядро, –* малое ядро.

Можно иначе. Разложим на множители в ряд Фурье, т.е.

.

Здесь является вырожденным ядром, а остаточный член ряда – малое ядро.

Итак, непрерывное ядро можно представить в виде

,

где – вырожденное ядро, , , – непрерывные функции на ,  *–* малое ядро, *.*

Тогда уравнение (1) можно записать в виде

, (2)

где

. (3)

Так как ядро мало, то существует резольвента , с помощью которой функция выражается через при условии

или

или

или

. (4)

(5)

(6)

Докажем, что ядро - вырожденное.

Действительно,

(

(7)

Функции , являются непрерывными функциями по как сумма непрерывной функции и определенного интеграла

зависящего от параметра , который определяет непрерывную функцию по , так как

.

Кроме того, являются аналитическими функциями по переменной в круге , так как

является определенным интегралом от аналитической функции по в области .

Уравнение (1) свели к интегральному уравнению (4) с вырожденным ядром. Каждое решение уравнения (4) является решением уравнения (1) и наоборот. Если уравнение (4) не имеет решения, то и уравнение (1) не имеет решения.

Проанализируем уравнение (4)

,

Пусть , (8) тогда

. (9)

, .

Откуда получаем алгебраическую систему для

, . (10)

, , .

зависит от ,так как зависит от и являются аналитическими функциями своей переменной в круге .

Существование решений системы (10) зависит от определителя матрицы

Отметим, что не является, вообще говоря, многочленом относительно . – аналитическая функция в круге . Кроме того . Следовательно, не является тождественным нулем, потому как аналитическая функция, не тождественно равная нулю, в круге может иметь только конечное число нулей.

Рассмотрим сопряженное уравнение

.

Приведем его к уравнению с вырожденным ядром по той же схеме, что и уравнение (1)

или

,

,

тогда существует резольвента , что

или

или

,

где

,

.

Легко убедится, что ядро – вырожденное. Однако оно не сопряженное по отношению к .

Действительно,

.

Следовательно, . Это неудобно, так как доказательство теорем Фредгольма в этом случае усложняется из-за того, что мы не можем воспользоваться готовой теорией для интегральных уравнений с вырожденными транспонированными ядрами.

Поэтому уравнение  сведем к уравнению с вырожденным ядром иначе.

. (11)

Введем новую функцию

.

Это выражение можно рассматривать как интегральное уравнение с малым ядром с неизвестной функцией и известной функцией . Тогда

. (12)

Откуда получим интегральное уравнение относительно функции : (подставим (12) в (11))

или

,

т.е.

. (13)

Всякому решению уравнения (13) по формуле (12) соответствует решение уравнения . Таким образом уравнения (4) и (13) имеют транспонированные вырожденные ядра.

В дальнейшем будем пользоваться уже доказанными теоремами Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденными ядрами.

1. Пусть такое, что и . Тогда уравнение (4) имеет единственное решение при любой функции , что

соответствует тому, что уравнение (1) имеет единственное решение при любой функции .

Уравнение (13) имеет единственное решение при любой функции . Решение уравнения  получим по формуле (12) и оно является единственным решением уравнения  при любой функции

В частности, однородные уравнения (1) и  имеют только нулевые решения. Следовательно, значения такие, что , являются правильными для ядер и .

1. Пусть такое, что и . Тогда уравнение (4), а потому и уравнение (1) в общем случае решений не имеет, а

соответствующие им однородные уравнения имеют ненулевые решения. Следовательно, такие значения являются собственными (характеристическими) для ядра .

Каждому собственному значению соответствует конечное число число линейно независимых решений однородного уравнения (1) , а его общее решение , - произвольные постоянные. Столько же линейно независимых решений имеет уравнение (13), а соответственно и однородное уравнение .

Все предыдущие рассуждения показывают, что для интегральных уравнений с непрерывными ядрами имеют место теоремы Фредгольма.

**Теорема 1.** Непрерывное ядро уравнения Фредгольма имеет не более чем счетное множество собственных чисел. Это множество может иметь предельную точку только на бесконечности.

**Теорема 2.** Если – правильное число ядра , то уравнения (1) и  имеют единственные решения при любых правых частях и , а однородные уравнения (1) и  имеют только нулевые решения.

Если – собственное число ядра , то оно является собственным числом и ядра и однородные уравнения соответствующие уравнениям (1) и  имеют одинаковое число линейно-независимых собственных функций.

**Теорема 3.** Если и – линейно независимые решения соответственно однородных уравнений (1) и , то общие решения этих уравнений  и , где - произвольные постоянные.

**Теорема 4.** Неоднородное уравнение (1) с правой частью и непрерывным ядром имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие , где – любое решение однородного уравнения .

Если – собственное число ядра и уравнение (1) разрешимо, то оно имеет бесчисленное множество решений

, где – какое-нибудь частное решение уравнения (1).

**Теорема 5. (об альтернативе).** Для интегрального уравнения (1)

(1)

с , представляются две взаимоисключающие возможности:

1. Или не является собственным числом ядра и тогда уравнение (1), также как и его сопряженное уравнение 



имеет одно и только одно решение , при любой правой части , . При этом соответствующие однородные уравнения имеют только тривиальные решения.

1. Или является собственным числом ядра , тогда уравнение (1) разрешимо в том и только в том случае, когда функция

ортогональна ко всем решениям соответствующего однородного транспонированного уравнения . При этом однородные уравнения (1) и  имеют одинаковое по мощности множество линейно-независимых решений (либо конечное, либо счетное) и общее решение уравнения (1) складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения уравнения (1).